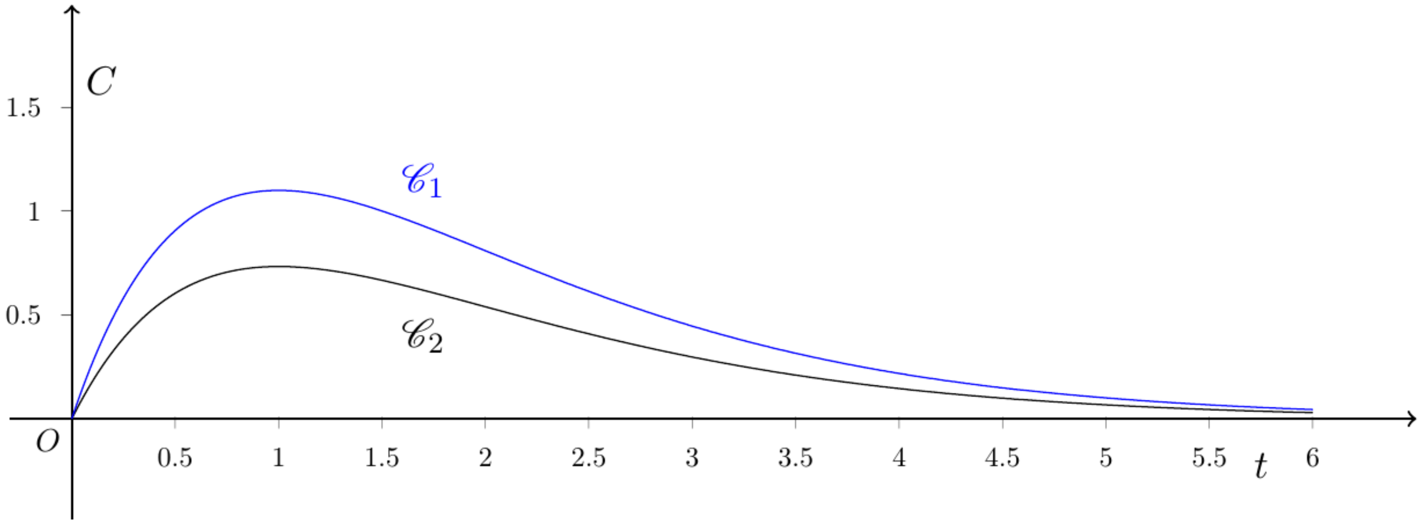
EXERCICE 1 **7 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Voici deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.
C est exprimée en gramme par litre et t en heure.

Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.
   À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?

   On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.

2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.
3. Une personne à jeûn absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par
   $$f(t) = Ate^{-t}$$
   où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.
   a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.
   b. L'affirmation suivante est-elle vraie ?
   « À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par
$$f(t) = 2te^{-t}$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.
3. Rappeler la limite de $\frac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de 0,2 $g.L^{-1}$ pour un jeune conducteur.
   a. Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0{,}2$.
   b. Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ? Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.
5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à 5×10^{-3} $g.L^{-1}$.
   a. Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.
   b. On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par $f(t) = 2te^{-t}$.

```
Initialisation :   t prend la valeur 3,5
                   p prend la valeur 0,25
                   C prend la valeur 0,21
Traitement :       Tant que C > 5 × 10^-3 faire :
                       t prend la valeur t + p
                       C prend la valeur f(t)
                   Fin Tant que
Sortie :           Afficher t
```

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme.
Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?

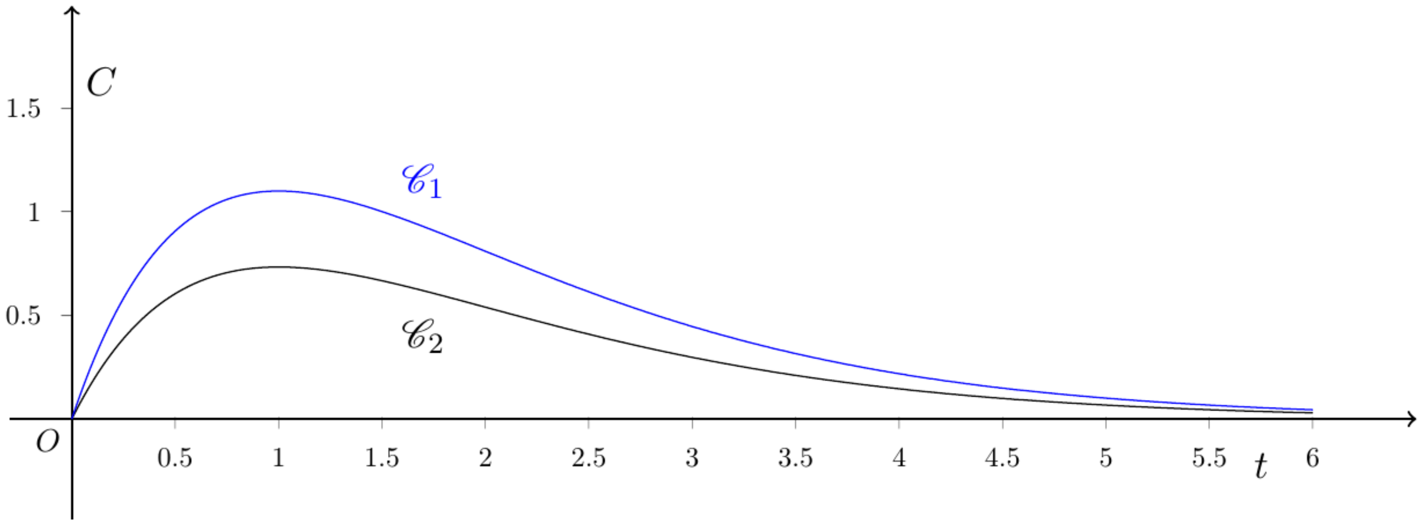
CORRECTION

Commun à tous les candidats

Partie A

Voici deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.
C est exprimée en gramme par litre et t en heure.

Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



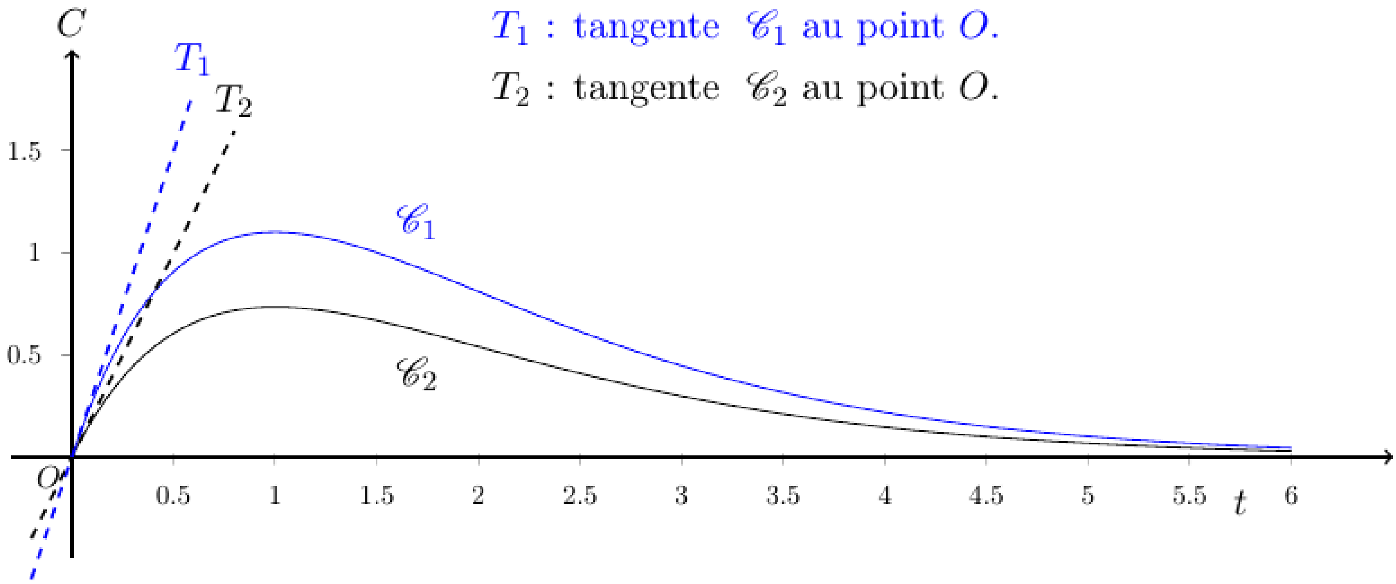
1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.
À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?

La vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$, or graphiquement $C'(t)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point de la courbe d'abscisse t.

On remarque d'après le graphique que **le plus grand coefficient directeur de tangente est obtenu lorsque $t = 0$**.

2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.

D'après l'énoncé, « on dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool. » ainsi la courbe ayant une tangente à l'origine avec un coefficient directeur le plus grand correspondra à la courbe de **la personne de plus faible corpulence soit la courbe $\mathscr{C}_1$**. Et la courbe correspondant à **la personne de plus forte corpulence est $\mathscr{C}_2$**.



3. Une personne à jeûn absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(t) = Ate^{-t}$$

où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.

Le fonction $t \mapsto -t$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ car c'est une fonction polynôme.
Donc d'après le cours, la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$.
De plus la fonction $t \mapsto At$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ donc par produit f est dérivable sur $[0;+\infty[$.

On a pour tout $t \in [0;+\infty[$ $f'(t) = A \times 1 \times e^{-t} + At \times (-1)e^{-t} = Ae^{-t}(1-t)$.

Ainsi $f'(0) = Ae^{-0}(1-0)$ donc $\boldsymbol{f'(0) = A}$.

3. b. L'affirmation suivante est-elle vraie ?
« À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

D'après 3.a., $f'(0) = A$, donc plus A est grand, plus le coefficient directeur de la tangente à l'origine est important et donc moins la personne sera corpulente d'après 2.

La proposition est donc fausse.

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(t) = 2te^{-t}$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

On sait que pour tout $t \in [0; +\infty[$ $f'(t) = Ae^{-t}(1-t)$. De plus $A > 0$ et $e^{-t} > 0$ donc $f'(t)$ est du signe de $1 - t$. On en déduit que :

f est croissante sur $[0; 1]$ et **f est décroissante sur $[1; +\infty[$**. On peut dresser le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2e^{-1}$	$\searrow$	

---

2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.

D'après le tableau de variations précédent, la concentration d'alcool dans le sang de Paul est- maximale lorsque $t = 1$, soit après 1 heure l'absorption.

---

3. Rappeler la limite de $\frac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

D'après le cours $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0$ soit $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$

Ce qui prouve que $\boldsymbol{\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0}$. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$. Cela signifie que **plus le temps passe plus la concentration d'alcool dans le sang se rapproche de 0**.

---

4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de 0,2 $g.L^{-1}$ pour un jeune conducteur.
a. Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$.

D'après le tableau de variations de f, on sait que f est strictement croissante et continue sur $[0;1]$ à valeur dans $[f(0); f(1)] = [0; 2e^{-1}]$.
Or $2e^{-1} \approx 0{,}736$, donc $0{,}2 \in [0; 2e^{-1}]$ ainsi d'après le théorème de la bijection (appelé aussi corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), il existe un unique $t_1 \in [0;1]$ tel que $f(t_1) = 0{,}2$.

D'autre part, f est strictement décroissante et continue sur $[1; +\infty[$ à valeur dans $]0; 2e^{-1}]$.
Or $0{,}2 \in]0; 2e^{-1}]$ ainsi d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $t_2 \in [1; +\infty[$ tel que $f(t_2) = 0{,}2$.

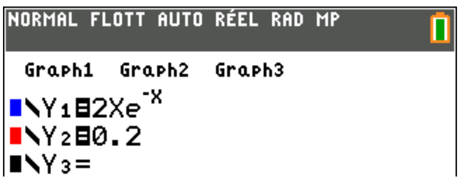
Conclusion : **Il existe deux nombres réels $t_1 \in [0;1]$ et $t_2 \in [1;+\infty[$ tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$**.

4.b. Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ? Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

On recherche $t_2 \in [1; +\infty[$ tel que $f(t_2) = 0{,}2$ à l'aide de notre calculatrice TI83 Premium CE :

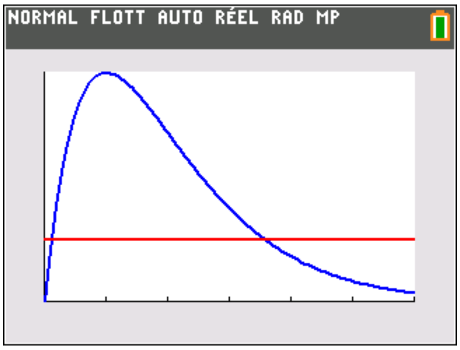
Représentons graphiquement la fonction f :

On entre son expression en appuyant sur [graph stats f1 / f(x)]
On entre aussi l'expression $Y_2 = 0{,}2$ pour afficher la droite d'équation $y = 0{,}2$.



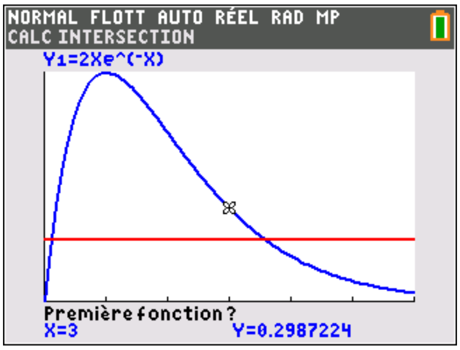
Puis on entre l'intervalle de définition. Ici l'intervalle de définition de f est d'amplitude infini, on a choisit ici $[0; 6]$ (comme sur la figure de l'énoncé) en appuyant sur [déf table f2 / fenêtre].

Puis on choisit le zoom automatique en appuyant sur format f3 zoom puis 0:AjustZoom

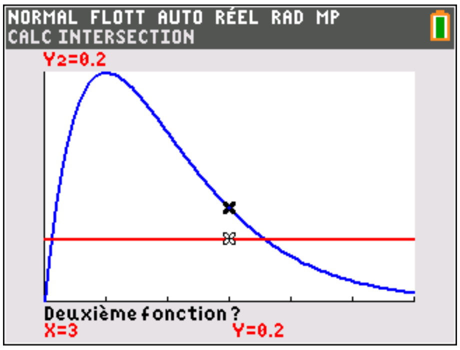


Pour déterminer t_2, on va chercher l'intersection de la courbe représentant f avec la droite d'équation $y = 0{,}2$ en appuyant sur 2nde calculs f4 trace et on choisit 5:intersection

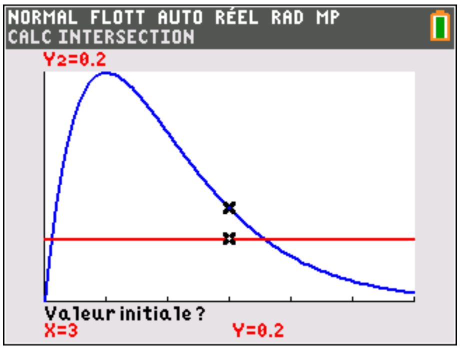
On choisit le première courbe, ici f (en bleu).



Puis la seconde courbe, ici notre droite (en rouge).

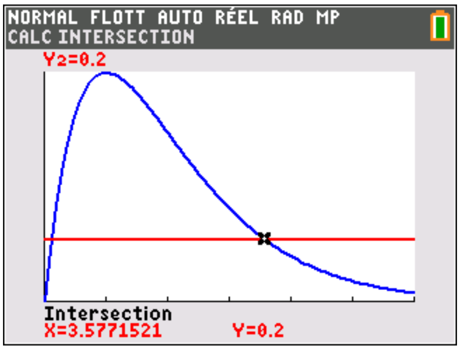


La calculatrice nous demande une valeur initiale, il faut prendre une abscisse relativement proche de celle du point d'intersection recherché, la valeur 3 convient.



On valide et on trouve $t_2 \approx 3{,}577$ heures soit 3 heures et 35 minutes.

Rappel : $3{,}577h = 3$ heures et 0,577 heure.
Et 0,577 heure $= 0{,}577 \times 60$ minutes soit 35 minutes environ.



---

5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à 5×10^{-3} $g.L^{-1}$.
a. Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

f est strictement décroissante et continue sur $[1;+\infty[$ à valeur dans $]0;2e^{-1}]$ or $5 \times 10^{-3} \in]0;2e^{-1}]$ ainsi d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $T \in [1;+\infty[$ tel que $f(T) = 5 \times 10^{-3}$.
Pour tout $t \geq T$ on a $f(t) \leq f(T)$ car f est décroissante sur $[1;+\infty[$ d'où $f(t) \leq 5 \times 10^{-3}$.

Conclusion : Il existe bien un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

---

5. b. On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par $f(t) = 2te^{-t}$.

Initialisation :	*t prend la valeur 3,5*
	p prend la valeur 0,25
	C prend la valeur 0,21
Traitement :	*Tant que $C > 5 \times 10^{-3}$ faire :*
	t prend la valeur $t + p$
	C prend la valeur $f(t)$
	Fin Tant que
Sortie :	*Afficher t*

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme.
Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?

Ecrivons cet algorithme à l'aide de notre TI83 Premium CE :

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAM:EX01
:3.5→T
:0.25→P
:0.21→C
:While C>5*10^-3
:T+P→T
:Y1(T)→C
:Disp P,T,C
:Pause
:End
:Disp T
```

On a ajouté **`Disp T,C`** afin d'afficher au cours de la boucle les valeurs successives de T et C.

On exécute le programme, on peut maintenant compléter le tableau.

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
prgmEX01
                 0.25
                 3.75
         0.1763830939
                 0.25
                    4
         0.1465251111
```

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25	0,25	0,25
t	3,5	3,75	4
C	0,21	0,18	0,15

L'algorithme permet de trouver, au quart d'heure près, le temps au bout duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.
On trouve $8{,}25h$ soit 8 heures et 15 minutes.