

借助图形计算器进行数学探究

上海市崇明中学 倪建峰

数学家波利亚在他的著作《数学与猜想》中特别强调：数学的创造性过程是与其他知识的创造过程是一样的，在证明一个数学定理之前，你先得猜测这个定理的内容，在你完全做出详细证明之前，你先得推测证明的思路……只要数学的学习过程稍能反映出数学的发明过程的话，那么就应当让猜测，合情推理占有适当的位置。总之，“数学探究”是波利亚的“数学发现”和弗赖登塔尔的“再创造”教育思想的继承和发展，是现代建构主义认知理论的具体实践。

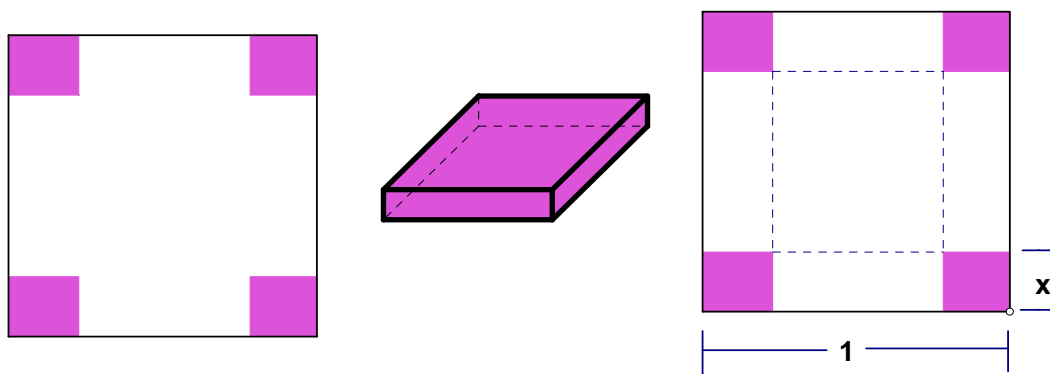
数学探究的目的是发展学习者自身的探究与解决问题的能力，使学习者成为知识的发现者，而不是被动者，这就要求学生在教师的引导下，设计恰当的素材，主动探究发现，一般程序为：观察——试探——思索——猜想——证明。这种程序充分肯定归纳，类比，联想等方法在数学发现中重要作用，特别是“数学猜想”因为它可被看成是数学探究活动的基本方式，表现为思维主体从一定依据出发，利用非逻辑手段，直接获得猜想性命题的创造性思维过程，而图形计算器在数学发现、数学猜想上起到了不可低估的作用。

1. 借助技术，拓宽解题思路

思路就是解题的途径，方法则是解题的手段，学生解题时无处下手，关键在于没有正确的思维方式和清晰的解题思路。在学习中我们要善于不断的总结，不断探索，寻求合理、准确、恰当的思维起点，以达到解题思路既自然，又流畅。只有这样，才能不断开发解题智慧，逐步提高分析问题和解决问题的能力。

案例一 最大容积问题

如图，有一块边长为 1 米的正方形硬纸板，在它的四个角各剪去一个小正方形后，再折成一只无盖的盒子。如果要使制成的盒子的容积最大，那么剪去的小正方形的边长为多少米？



设剪去小正方形的边长为 x 米，学生很容易得到盒子的容积为

$$V = x(1-2x)^2 \quad (0 < x < \frac{1}{2})$$

对于这样一个函数的最值问题，学生知道可以用基本不等式加以解决，但是必须要考虑等号成立的条件。通常我们在解数学问题时，首先应当考虑的是存在性问题，即函数的最值是否存在？只有存在了，我们才下定决心来研究。基于这一点，我们借助图形计算器，那么这个函数的最值就直观了。

```

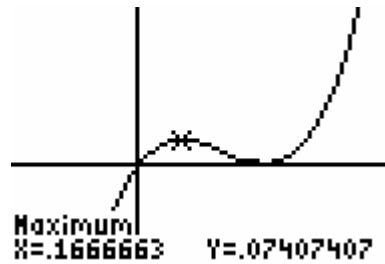
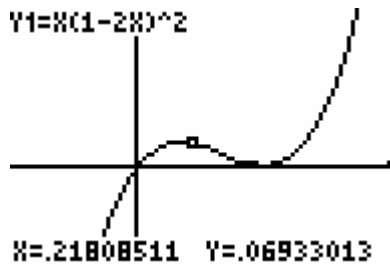
WINDOW
Xmin=-.5
Xmax=1
Xscl=1
Ymin=-.3
Ymax=.5
Yscl=1
Xres=3

```

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=X(1-2X)^2
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=

```



通过与基本不等式解法的比较，学生加深了理解，达到了掌握目的，学生能够清晰地看出两种方法的不同之处。

2. 一题多解，鼓励创新

数学教学，本质上是一种数学活动。通过活动，让学生学习自行获取数学知识的方法，学习主动参与数学实践的本领；进而获得终身受益的数学基础能力和创造能力，教师要营造自由和谐的气氛，鼓励学生积极思考、大胆质疑、不断产生新设想。

案例二 函数的零点

若案例一中，正方形的边长为 13 厘米，制成的长方体盒子的容积为 140 立方厘米，问此时 x 是多少？(精确到 0.1)

根据题意，得 $x(13-2x)^2 = 140$ ，即 $4x^3 - 52x^2 + 169x - 140 = 0$

求这个三次方程的实数根，就是求函数 $f(x) = 4x^3 - 52x^2 + 169x - 140$ ($0 < x < \frac{13}{2}$)

的零点。学生学习了图形计算器后就能用图形计算器来辅助解决，而且快捷方便。

```

WINDOW

```

```

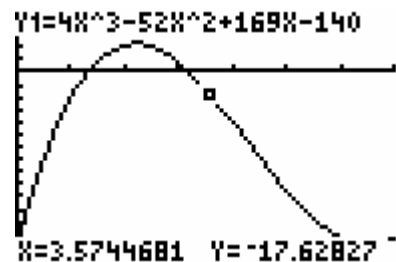
Xmin=0
Xmax=7
Xscl=1
Ymin=-150
Ymax=50
Yscl=10
Xres=3

```

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=4X^3-52X^2+169X-140
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=

```



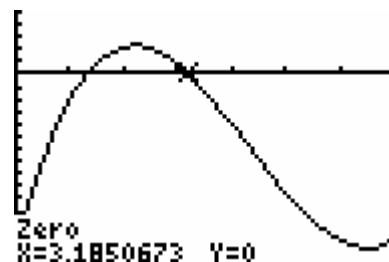
从函数图像上，我们知道，函数 $f(x)$ 在区间 (1, 2)、(3, 4) 内各有一个零点。

解法一：二期课改教材《高一年级第一学期》P92 二分法来解决

解法二：直接从函数图像中计算函数的零点



2



解法三：利用方程求解器 solver

```

4X^3-52X^2+16...=0
▪ X=1.2888413083...
  bound={-1E99,1...
  ▪ left-rt=0
    
```

```

4X^3-52X^2+16...=0
▪ X=3.1850673039...
  bound={-1E99,1...
  ▪ left-rt=0
    
```

解法四：由函数零点所在的大致范围，设置 TABLE，从 TABLE 中得到零点

X	Y1
1.26	-1.614
1.28	-.4882
1.3	.608
1.32	1.6751
1.34	2.7132
1.36	3.7226
1.38	4.7035

Y1=4X^3-52X^2+16...

X	Y1
3.18	.20493
3.2	-.608
3.22	-1.432
3.24	-2.266
3.26	-3.111
3.28	-3.967
3.3	-4.832

Y1=4X^3-52X^2+16...

学生互相合作交流，共同探讨，激发了学习的兴趣，得到了上述的一系列解法，而教师则引导学生进行探究，设置问题：这些解法最本质的东西是什么？图形计算器为什么能快速地解方程呢？

学生有一次陷入了深思，虽然我们不清楚图形计算器里面的算法、程序是怎样的，但是应该是编制二分法等程序来解决问题的。所以我们在利用图形计算器解决问题的高兴之余，应该也要掌握最基本的方法：二分法。

3. 借助图形计算器，鼓励学生猜想

数学问题的探究对学生来说是比较困难的，学生的知识水平有限，所以容易陷入困境，一些方程无法求解，有些图像不能判断，某些运算无法完成。作为教师，不太可能完全系统地进行知识传授，借助图形计算器的强大功能，一些知识上的障碍得以轻松跨越，学生可以集中精力挖掘、研究问题中的核心部分。更重要的是，技术帮学生插上了猜想的翅膀，学生用机器试算若干值后，进行大胆的归纳猜想；也可以引导学生根据其他知识、现象、性质、结论进行类比猜想；可以借助作图功能，观察图像，数形结合，进行猜想；还可以编写程序，借助程序运算，得出部分结论，进行猜想。没有猜想，就没有探究。

案例三 声音传播问题

声音传播的最大距离（米）与声音强度（分贝）的对应数据如下表所示：

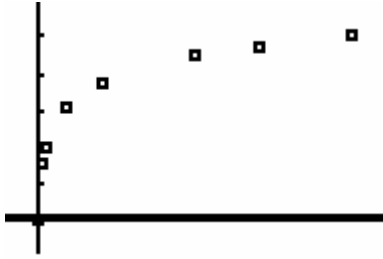
测量次数	1	2	3	4	5	6	7	8
分贝	0.5	3.2	5.3	16.8	35.8	84.2	120.0	170.0
米	0.1	16.0	20.4	30.5	37.0	44.5	47.6	50.6

完成以下作业：

建立声音强度与传播最大距离间的数学模型：

- 1) 确定模型中函数的类型；
- 2) 寻找适当的方法，定出函数模型中的待定系数，建立经验公式；
- 3) 验证计算结果与数据是否相符；
- 4) 修正数学表达式，提出结论。

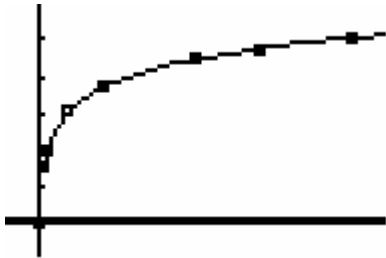
学生分成了几个小组进行讨论研究，互相交流结果，数据拟合正是图形计算器的强项，学生采用了多种曲线尝试对数据进行拟合，通过比较分析，得出精确结论。



LnReg L1,L2,Y1■

```
LnReg
y=a+blnx
a=6.001607139
b=8.678749387
r^2=.9999840477
r=.9999920238
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=6.0016071386
04+8.67874938688
33ln(X)
\Y2=■
\Y3=
\Y4=
\Y5=
```



同学们认为：解决实际问题、探究性问题其实不难，关键是要充分熟悉和掌握书本上的基本知识；其次要求我们能正确理解题目意思、充分挖掘其中的隐含条件；当然我们还要学会思考、利用各种方法提高我们的思维能力，并获取最佳的解题效果。

课堂教学中的数学探究性学习，其着眼点就是要改变学生的学习方式，即改变原有的教育条件下形成的偏重机械记忆和理解，以接受教师知识灌输为主的学习方式，数学探究性学习创设了一种有助于探究的开放的情境和途径，建构了一种有利于学生终身发展的多元化的学习方式。

学生学习具有自主性，是学习的真正主人，能够独立获取知识，对相关信息的收集、分析和处理，不断地进行猜想、论证，改进所得结论，从而实际感受和亲身体验数学知识的产生过程，并逐步形成研究科学的积极态度。

参考资料：

《浅谈基于图形计算器的数学探究》

施洪亮

华东师大二附中